Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $\det(A) = -2 \neq 0$, deci $rang(A) = 2$.

b) Se arată că $f(B) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $f(X) = B$ atunci $tr(AX - XA) = tr(B)$, deci $0 = 2$ fals.

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2a^2$.

b) x_1 e o rădăcină a polinomului f $\Leftrightarrow$ $f(x_1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1^3 + a^2x_1 - a = 0$ $\overset{x_1^3 \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $1 + \frac{a^2}{x_1^2} - \frac{a}{x_1^3} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{x_1}$ este o rădăcină a polinomului g.

c) Notăm cu $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$ rădăcinile polinomului g. Deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2a^2 < 0$, rezultă că f are o singură rădăcină reală, de exemplu x_1. Atunci, $\frac{1}{x_1} \in \mathbb{R}$ este unica rădăcină reală a lui g.

Presupunem că $x_1 = \frac{1}{x_1}$, deci că $x_1 \in \{-1, 1\}$. Dacă $x_1 = -1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(-1) = 0$ deducem $a^2 + a + 1 = 0$, fals. Dacă $x_1 = 1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(1) = 0$ deducem $a^2 - a + 1 = 0$, fals.